



Московский физико-технический институт
(государственный университет)

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Лабораторные работы №№ 150, 151

МОСКВА 2005

150. Спектральный анализ электрических сигналов

Цель работы: изучение спектрального состава периодических электрических сигналов.

В работе используются: анализатор спектра СК4-56, генератор прямоугольных импульсов Г5-54, генератор сигналов специальной формы Г6-34, осциллограф С1-76.

В работе изучается спектральный состав периодических электрических сигналов различной формы: последовательности прямоугольных импульсов, последовательности пугов и амплитудно-модулированных гармонических колебаний. Спектры этих сигналов наблюдаются с помощью промышленного анализатора спектра и сравниваются с рассчитанными теоретически.

Принцип работы спектроанализатора. Для исследования спектров в работе используется гетеродинный анализатор спектра типа СК4-56. Принцип работы анализатора заключается в следующем: входные цепи анализатора последовательно преобразуют поступающие на его вход колебания с разными частотами в колебания вполне определённой *промежуточной* частоты; выходной прибор (в нашем случае это электронно-лучевая трубка — ЭЛТ) воспроизводит амплитуду сигнала промежуточной частоты. Напряжение, пропорциональное частоте сигнала, который в данный момент преобразуется в сигнал промежуточной частоты, подаётся на вход X ЭЛТ; напряжение, пропорциональное амплитуде исследуемой гармоники, поступает на вход Y . На экране анализатора возникает, таким образом, график, изображающий зависимость амплитуды гармоник от частоты, т.е. *Фурье-спектр* исследуемого сигнала.

Для преобразования частоты колебаний, относящихся к исследуемому участку спектра, в сигнал промежуточной частоты служит нелинейный элемент (смеситель), на вход которого подаются исследуемый сигнал и сигнал со вспомогательного генератора колебаний регулируемой частоты (с гетеродина). При нелинейном сложении этих колебаний на выходе смесителя возникают сигналы суммарной и разностной частоты. Для анализа используется только разностный сигнал. Смещение частот исследуемого сигнала и частоты гетеродина лежит в основе большинства современных радиоприёмных устройств — супергетеродинов.

Упрощённая структурная схема, поясняющая последовательный супергетеродинный метод спектрального анализа внешнего сигнала, изображена на рис. 1. Исследуемый сигнал $f(t)$ поступает на смеситель, на который одновременно подаётся напряжение с гетеродина. Разностный

по частоте сигнал подаётся на фильтр, пропускающий очень узкую полосу частот, усиливается, детектируется, вновь усиливается и подводится на вертикальный вход ЭЛТ.

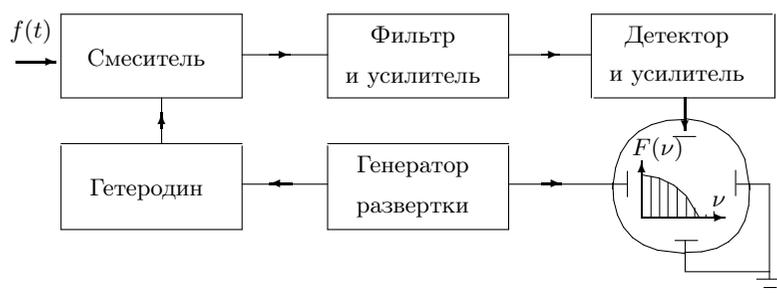


Рис. 1. Структурная схема анализатора спектра

Частота гетеродина управляется пилообразным напряжением, которое вырабатывается в генераторе развёртки. Сигнал с генератора подаётся также на горизонтальный вход ЭЛТ. Частота сигналов, вырабатываемых гетеродином, изменяется в пределах от 128 до 188 кГц. Фильтр настроен на частоту 128 кГц. Прибор анализирует, таким образом, колебания с частотами, лежащими между $128 - 128 = 0$ кГц и $188 - 128 = 60$ кГц.

А. Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов

Экспериментальная установка. Схема для исследования спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов представлена на рис. 2. Сигнал с выхода генератора прямоугольных импульсов Г5-54 подаётся на вход анализатора спектра и одновременно — на вход Y осциллографа. С генератора импульсов на осциллограф подаётся также сигнал синхронизации, запускающий ждущую развёртку осциллографа. При этом на экране осциллографа можно наблюдать саму последовательность прямоугольных импульсов, а на экране ЭЛТ анализатора спектра — распределение амплитуд спектральных составляющих этой последовательности.

В наблюдаемом спектре отсутствует информация об амплитуде нулевой гармоники, т. е. о величине постоянной составляющей; её местоположение (начало отсчёта шкалы частот) отмечено небольшим вертикальным выбросом.

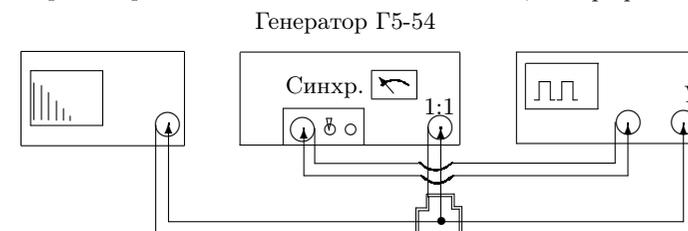


Рис. 2. Схема для исследования спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов

ЗАДАНИЕ

В этом упражнении исследуется зависимость ширины спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов от длительности отдельного импульса.

1. Соберите схему согласно рис. 2 и включите в сеть только генератор Г5-54.
2. Познакомьтесь с назначением ручек управления генератора и осциллографа по техническому описанию, расположенному на установке (ТО, разделы I и II).
3. Подготовьте установку к измерениям, следуя техническому описанию (см. ТО, раздел III А).
4. Установив на анализаторе режим работы с однократной развёрткой, получите на его экране спектр импульсов с параметрами $f_{\text{повт}} = 10^3$ Гц; $\tau = 25$ мкс; частотный масштаб $m_x = 5$ кГц/дел (см. ТО, III А, п. 7).
5. Проанализируйте, как меняется спектр ($\Delta\nu$ и $\delta\nu$ на рис. П.3): а) при увеличении τ вдвое при неизменном $f_{\text{повт}} = 1$ кГц; б) при увеличении $f_{\text{повт}}$ вдвое при неизменном $\tau = 25$ мкс.

Опишите результаты или зарисуйте в тетрадь качественную картину.

6. Проведите измерения зависимости ширины спектра от длительности импульса $\Delta\nu(\tau)$ при увеличении τ от 25 до 200 мкс (6–8 значений при $f_{\text{повт}} = 1$ кГц и масштабе по горизонтали $m_x = 5$ кГц/дел).
7. Скопируйте на кальку огибающие спектров с параметрами: $f_{\text{повт}} = 1$ кГц, $m_x = 5$ кГц/дел, а) $\tau = 50$ мкс, б) $\tau = 100$ мкс. Запишите на кальках эти параметры и приложите кальки к отчёту.
8. Постройте график $\Delta\nu(1/\tau)$ и по его наклону убедитесь в справедливости соотношения неопределённостей.

Б. Исследование спектра периодической последовательности цугов гармонических колебаний

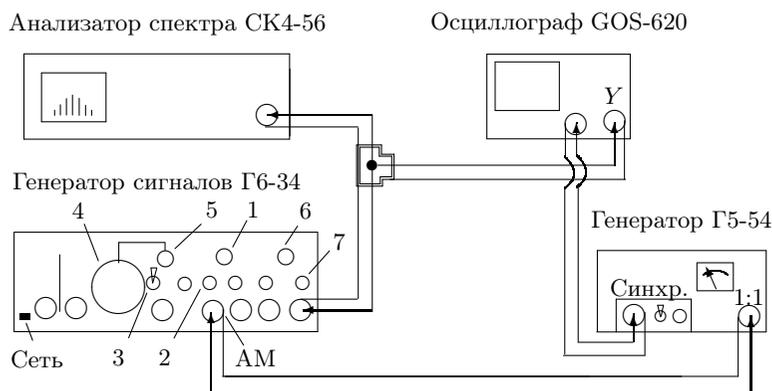


Рис. 3. Схема для исследования спектра периодической последовательности цугов высокочастотных колебаний

Экспериментальная установка. Исследование спектра периодически чередующихся цугов гармонических колебаний проводится по схеме, изображённой на рис. 3. Генератор Г6-34 вырабатывает синусоидальные колебания высокой частоты. На вход АМ (амплитудная модуляция) генератора Г6-34 подаются прямоугольные импульсы с генератора Г5-54 и синусоида модулируется — «нарезается» на отдельные куски — *цуги*. Эти цуги с выхода генератора Г6-34 поступают на вход спектроанализатора и одновременно на вход У осциллографа. Сигнал синхронизации подаётся на вход Х осциллографа с генератора импульсов.

ЗАДАНИЕ

В этом упражнении исследуется зависимость расстояния между ближайшими спектральными компонентами от частоты повторения цугов.

1. Соберите схему, изображённую на рис. 3.
2. Подготовьте приборы к работе, следуя техническому описанию (ТО, раздел III, Б).
3. Установив частоту несущей $\nu_0 = 25$ кГц, проанализируйте, как изменяется вид спектра при увеличении длительности импульса вдвое ($\tau = 50, 100$ мкс для $f_{\text{повт}} = 1$ кГц).
4. При фиксированных значениях $f_{\text{повт}} = 1$ кГц, $\tau = 100$ мкс и частотном масштабе $m_x = 5$ кГц/дел проследите, как меняется картина спектра при изменении несущей частоты ν_0 (на генераторе Г6-34 $\nu_0 = 25, 10$ или

40 кГц). Опишите результаты эксперимента или зарисуйте качественную картину в тетради.

5. При фиксированной длительности импульсов $\tau = 50$ мкс исследуйте зависимость расстояния $\delta\nu$ между соседними спектральными компонентами от периода T (частоты повторения импульсов $f_{\text{повт}}$). Проведите измерения для 5–6 значений частоты $f_{\text{повт}}$ в диапазоне 1–8 кГц, подбирая горизонтальный масштаб m_x , удобный для измерений (см. ТО, III А, п.7).
6. Скопируйте на кальку спектры цугов с параметрами: $\tau = 100$ мкс, $m_x = 5$ кГц/дел; а) $f_{\text{повт}} = 1$ кГц; б) $f_{\text{повт}} = 2$ кГц. Запишите на кальках эти параметры и приложите кальки к отчёту.
7. Постройте график $\delta\nu(f_{\text{повт}})$ и по его наклону убедитесь в справедливости соотношения неопределённости.
8. Сравните зарисованные на кальку спектры:
 - а) прямоугольных импульсов при одинаковых периодах и разных длительностях импульса τ ;
 - б) цугов при одинаковых τ и разных периодах;
 - в) цугов и прямоугольных импульсов при одинаковых значениях τ и T .

В. Исследование спектра гармонических сигналов, модулированных по амплитуде

Экспериментальная установка. Схема для исследования амплитудно-модулированного сигнала представлена на рис. 4. Модуляционный генератор встроен в левую часть генератора сигналов Г6-34. Синусоидальный сигнал с частотой модуляции $f_{\text{мод}} = 1$ кГц подаётся с модуляционного генератора на вход АМ (амплитудная модуляция) генератора, вырабатывающего синусоидальный сигнал высокой частоты (частота несущей $\nu_0 = 25$ кГц). Амплитудно-модулированный сигнал с основного выхода генератора поступает на осциллограф и на анализатор спектра.

ЗАДАНИЕ

В этом упражнении исследуется зависимость отношения амплитуд спектральных линий синусоидального сигнала, модулированного низкочастотными гармоническими колебаниями, от коэффициента модуляции, который определяется с помощью осциллографа.

1. Соберите схему, изображённую на рис. 4.
2. Подготовьте приборы к работе, следуя техническому описанию (ТО, раздел III, С).
3. Изменяя глубину модуляции (ручка 11 на Г6-34), исследуйте зависимость отношения амплитуды боковой линии спектра к амплитуде основной линии ($A_{\text{бок}}/A_{\text{осн}}$) от глубины модуляции m (5–6 значений в диапазоне

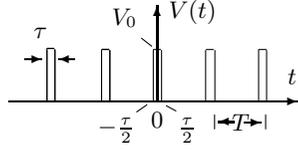


Рис. 1. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

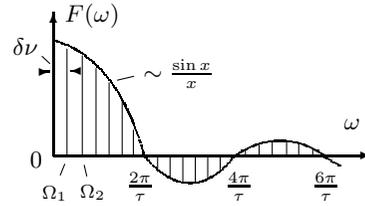


Рис. 2. Спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов

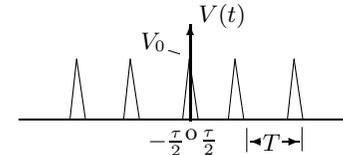


Рис. 3. Периодическая последовательность треугольных импульсов

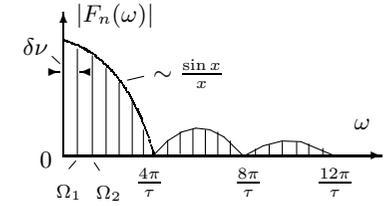


Рис. 4. Спектр периодической последовательности треугольных импульсов ($T/\tau = 3,5$)

Поскольку наша функция чётная, все амплитуды синусоидальных гармоник $b_n = 0$. В этом случае $A_n = a_n$, а начальная фаза колебаний $\psi_n = 0$ в области частот

$$\frac{4\pi n}{\tau} < \Omega_n < \frac{2\pi(2n+1)}{\tau} \quad (2)$$

или $\psi_n = \pi$ в области

$$\frac{2\pi(2n+1)}{\tau} < \Omega_n < \frac{2\pi(2n+2)}{\tau}, \quad (3)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$. Спектральное распределение амплитуд дискретных гармоник для бесконечной последовательности прямоугольных импульсов при отношении $T/\tau = 7$ представлено на рис. 2. «Отрицательные» амплитуды на рисунке соответствуют тем гармоникам, фаза которых $\psi_n = \pi$.

II. Периодическая последовательность треугольных импульсов с отношением $T/\tau = 3,5$ (рис. 3).

Амплитуды в спектре последовательности треугольных импульсов меняются по закону

$$|A_n| = \frac{V_0\tau}{2T} \left(\frac{\sin[\pi n\tau/(2T)]}{\pi n\tau/(2T)} \right)^2. \quad (4)$$

Фаза n -й гармоники $\psi_n = 0$ в области частот

$$\frac{8\pi n}{\tau} < \Omega_n < \frac{4\pi(2n+1)}{\tau} \quad (5)$$

или $\psi_n = \pi$ в области

$$\frac{4\pi(2n+1)}{\tau} < \Omega_n < \frac{4\pi(2n+2)}{\tau}. \quad (6)$$

Модуль спектральной плотности $|F(\omega)| = |A_n|$ для такой функции представлен на рис. 4.

Экспериментальная установка. Основным элементом экспериментальной установки является генератор гармонических сигналов Г6-1, который генерирует одновременно основной сигнал (на выбранной частоте) и пять гармоник, кратных основному сигналу и синхронных с ним. Например, если частота основного сигнала (1-ая гармоника) составляет 1 кГц, то частоты остальных пяти гармоник — 2 кГц, 3 кГц, 4 кГц, 5 кГц и 6 кГц. Все 6 гармоник могут складываться при помощи электронного сумматора, на выходе которого образуется сигнал сложной формы. Этот сигнал с выхода генератора подаётся на вход Y осциллографа, на экране которого можно наблюдать (в режиме непрерывной развёртки) периодическую последовательность синтезированных сигналов. Технические данные генератора и порядок работы с ним изложены в отдельном техническом описании, расположенном на установке.

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается подобрать амплитуды синусоидальных колебаний с кратными частотами, сумма которых даёт периодическую последовательность прямоугольных или треугольных импульсов.

I. Синтез последовательности прямоугольных импульсов

1. Прочтите техническое описание (ТО) генератора Г6-1.
2. Тумблером 1 (рис. 1 ТО) включите в сеть блок питания генератора. Время прогрева генератора около 10 мин.
3. Рассчитайте относительные значения амплитуд первых шести гармоник в спектре периодической последовательности прямоугольных импульсов с отношением $T/\tau = 7$: нулевая гармоника (постоянная составляющая) не используется; первая гармоника соответствует основному сигналу генератора; приняв амплитудное значение первой гармоники за единицу,

относительные амплитудные значения (a_n/a_1) остальных пяти гармоник рассчитайте по формуле (1). Амплитуда седьмой гармоники в наших условиях (при $T/\tau = 7$) равна нулю. Значения синусов, необходимые для вычислений, приведены в таблице:

n	1	2	3	4	5	6
α_n	$\pi/7$	$2\pi/7$	$3\pi/7$	$4\pi/7$	$5\pi/7$	$6\pi/7$
$\sin \alpha_n$	0,434	0,782	0,975	0,975	0,782	0,434
$a_n \sim \frac{\sin \alpha_n}{n}$						
$\frac{a_n}{a_1}$	1					

- Установите частоту первой гармоники — 10 кГц (см. ТО, I).
- Все шесть гармоник при суммировании должны иметь одинаковые фазы, поскольку их начальные фазы равны нулю [см. (2)]. Предварительная регулировка фаз проводится при одинаковых напряжениях гармоник. Откалибруйте (уровняйте) напряжения гармоник [см. ТО, II]. Если напряжение какой-либо гармоники не достигает калибровочного, оставьте максимально возможное (для следующего этапа — предварительной регулировки фазы — это несущественно).
- Включите в сеть осциллограф и проведите регулировку фазы гармоник (см. ТО, III).
- С помощью осциллографа установите рассчитанные Вами относительные амплитуды гармоник [см. ТО, IV].
- Последовательно увеличивая число гармоник, копируйте на кальку сигнал, возникающий на экране осциллографа. Перед тем, как подключить новую гармонику, ещё раз подстройте её фазу так, как Вы это делали, выполняя п. 6.

По результирующей осциллограмме, соответствующей сумме всех шести гармоник, определите отношение T/τ и сравните его с теоретическим значением.

II. Синтез последовательности треугольных импульсов

- Рассчитайте с помощью формулы (4) относительные амплитуды гармоник в спектре периодической последовательности треугольных импульсов с отношением $T/\tau = 3,5$. Для этого возведите в квадрат относительные амплитудные значения гармоник для спектра прямоугольных импульсов (см. п. 3).
- Установите относительные амплитуды гармоник, как это описано в п. 7.
- Получите осциллограмму от всех шести гармоник и скопируйте её на кальку. Определите отношение T/τ и сравните его с теоретическим.

Спектральный анализ электрических сигналов

Многие физические процессы можно моделировать с помощью линейных дифференциальных уравнений. К решениям таких уравнений применим принцип суперпозиции: разнообразные сложные явления удобно представлять в виде суммы простых решений линейных уравнений. Для линейных уравнений такими простыми решениями являются гармонические функции. Математическая теория представления сложных функций в виде сумм гармонических составляющих получила название *теории рядов и интегралов Фурье* (см. соответствующий учебник).

В радиотехнике широко используется разложение сложных сигналов на гармонические колебания различных частот ω . Функция $F(\omega)$, описывающая зависимость амплитуды гармоник от их частоты, называется *амплитудной спектральной характеристикой* — *спектром* исходного сигнала. Представление сложного периодического сигнала в виде суммы гармонических сигналов в математике называется *разложением в ряд Фурье*. Непериодические сигналы представляются в виде *интеграла Фурье*.

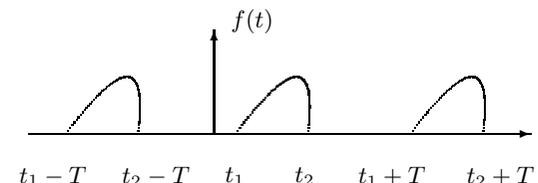


Рис. П.1. График периодической функции с периодом повторения T

Пусть заданная функция $f(t)$ периодически повторяется с частотой $\Omega_1 = 2\pi/T$, где T — период повторения (рис. П.1). Её разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\Omega_1 t) + b_n \sin(n\Omega_1 t)] \quad (\text{П.1})$$

или

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega_1 t - \psi_n). \quad (\text{П.2})$$

Здесь $a_0/2 = A_0/2$ — постоянная составляющая (среднее значение) функции $f(t)$; a_n и b_n — амплитуды косинусных и синусных членов разложе-

ния. Они определяются выражениями

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n\Omega_1 t) dt; \quad (\text{П.3})$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n\Omega_1 t) dt. \quad (\text{П.4})$$

Точку начала интегрирования t_1 можно выбрать произвольно.

В тех случаях, когда сигнал чётен относительно $t = 0$, так что $f(t) = f(-t)$, в тригонометрической записи остаются только косинусные члены, т.к. все коэффициенты b_n обращаются в нуль. Для нечётной относительно $t = 0$ функции, наоборот, в нуль обращаются коэффициенты a_n , и ряд состоит только из синусных членов.

Амплитуда A_n и фаза ψ_n n -й гармоники выражаются через a_n и b_n следующим образом:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad \psi_n = \arctg \frac{b_n}{a_n}. \quad (\text{П.5})$$

Как мы видим, спектр любой периодической функции состоит из набора гармонических колебаний с дискретными частотами: $\Omega_1, 2\Omega_1, 3\Omega_1, \dots$ и постоянной составляющей, которую можно рассматривать как колебание с нулевой частотой ($0 \cdot \Omega_1$).

Представим выражение (П.2) в комплексной форме. Для этого заменим косинусы экспонентами в соответствии с формулой

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}.$$

Подстановка даёт

$$f(t) = \frac{1}{2} \left(A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-i\psi_n} e^{in\Omega_1 t} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\psi_n} e^{-in\Omega_1 t} \right).$$

Введём комплексные амплитуды \tilde{A}_n и \tilde{A}_{-n} :

$$\tilde{A}_n = A_n e^{-i\psi_n}; \quad \tilde{A}_{-n} = A_n e^{i\psi_n}; \quad \tilde{A}_0 = A_0. \quad (\text{П.6})$$

Разложение $f(t)$ приобретает вид

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{A}_n e^{in\Omega_1 t}. \quad (\text{П.7})$$

Как мы видим, введение отрицательных частот (типа $-n\Omega_1$) позволяет записать разложение Фурье особенно простым образом. Формулы (П.6) обеспечивают действительность суммы (П.7): каждой частоте $k\Omega_1$ соответствуют в (П.2) — один член ($n = k$), а в (П.7) — два члена ($n = k$ и $n = -k$). Формулы (П.6) позволяют переходить от действительного разложения (П.2) к комплексному (П.7) и обратно.

Для расчёта комплексных амплитуд A_n не обязательно пользоваться формулами (П.6). Умножим левую и правую части (П.7) на $e^{-ik\Omega_1 t}$ и проинтегрируем полученное равенство по времени на отрезке, равном одному периоду, например, от $t_1 = 0$ до $t_2 = 2\pi/\Omega_1$. В правой части обратятся в нуль все члены, кроме одного, соответствующего $n = k$. Этот член даёт $A_k T/2$. Имеем поэтому

$$A_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\Omega_1 t} dt. \quad (\text{П.8})$$

Рассмотрим периодические функции, которые исследуются в нашей работе.

А. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов (рис. П.2) с амплитудой V_0 , длительностью τ , частотой повторения $f_{\text{повт}} = 1/T$, где T — период повторения импульсов.

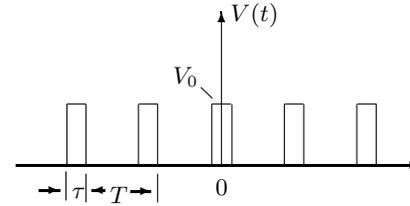


Рис. П.2. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

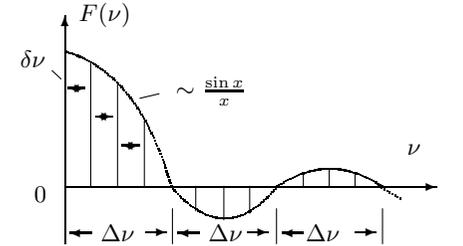


Рис. П.3. Спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов

Найдём среднее значение (постоянную составляющую). Согласно формуле (П.3)

$$\langle V \rangle = \frac{a_0}{2} = \frac{A_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 dt = V_0 \frac{\tau}{T}.$$

Амплитуды косинусных составляющих равны

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(n\Omega_1 t) dt = 2V_0 \frac{\tau}{T} \frac{\sin(n\Omega_1 \tau/2)}{n\Omega_1 \tau/2} \sim \frac{\sin x}{x}. \quad (\text{П.9})$$

Поскольку наша функция чётная, все амплитуды синусоидальных гармоник $b_n = 0$. Спектр $F(\nu)$ последовательности прямоугольных импульсов представлен на рис. П.3. Амплитуды гармоник A_n меняются по закону $(\sin x)/x$.

На рис. П.3 изображён спектр для случая, когда T кратно τ . Назовём *шириной спектра* $\Delta\omega$ (или $\Delta\nu$) расстояние от главного максимума ($\nu = 0$) до первого нуля, возникающего, как нетрудно убедиться, при $\Omega_1 = 2\pi/\tau$. При этом

$$\Delta\omega\tau \simeq 2\pi \quad \text{или} \quad \Delta\nu\Delta t \simeq 1. \quad (\text{П.10})$$

Полученное соотношение взаимной связи интервалов $\Delta\nu$ и Δt является частным случаем *соотношения неопределённости* в квантовой механике. Несовместимость острой локализации волнового процесса во времени с узким спектром частот — явление широко известное в радиотехнике. Ширина селективной настройки $\Delta\nu$ радиоприёмника ограничивает приём радиосигналов длительностью $t < 1/\Delta\nu$.

В. Периодическая последовательность цугов гармонического колебания $V_0 \cos(\omega_0 t)$ с длительностью цуга τ и периодом повторения T (рис. П.4).

Функция $f(t)$ снова является чётной относительно $t = 0$. Амплитуда n -й гармоники согласно формуле (П.3) равна

$$A_n = a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(\omega_0 t) \cdot \cos(n\Omega_1 t) dt = V_0 \frac{\tau}{T} \left(\frac{\sin[(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} + \frac{\sin[(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} \right). \quad (\text{П.11})$$

Такое спектральное распределение $F(\omega)$ для случая, когда T/τ равно целому числу, представлено на рис. П.5. Сравнивая спектр последовательности прямоугольных импульсов и спектр цугов (см. рис. П.3 и П.5), мы видим, что они аналогичны, но их максимумы сдвинуты по частоте на величину ω_0 .

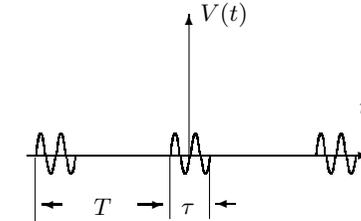


Рис. П.4. Периодическая последовательность цугов

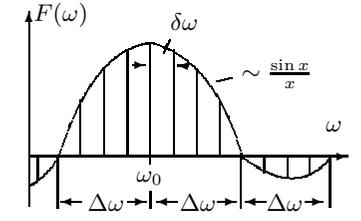


Рис. П.5. Спектр периодической последовательности цугов

В. Амплитудно-модулированные колебания. Рассмотрим гармонические колебания высокой частоты ω_0 , амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой Ω ($\Omega \ll \omega_0$) (рис. П.6):

$$f(t) = A_0[1 + m \cos(\Omega t)] \cos(\omega_0 t). \quad (\text{П.12})$$

Коэффициент m называют глубиной модуляции. При $m < 1$ амплитуда колебаний меняется от минимальной $A_{\min} = A_0(1 - m)$ до максимальной $A_{\max} = A_0(1 + m)$. Глубина модуляции может быть представлена в виде

$$m = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}}. \quad (\text{П.13})$$

Простым тригонометрическим преобразованием уравнения (П.12) можно найти спектр амплитудно-модулированных колебаний:

$$f(t) = A_0 \cos(\omega_0 t) + A_0 m \cos(\Omega t) \cos(\omega_0 t) = A_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t. \quad (\text{П.14})$$

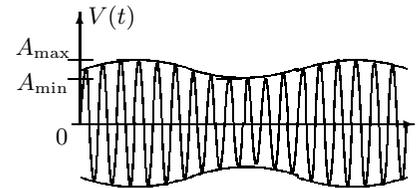


Рис. П.6. Гармонические колебания, модулированные по амплитуде

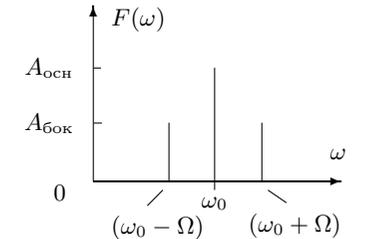


Рис. П.7. Спектр колебаний, модулированных по амплитуде

Спектр $F(\omega)$ таких колебаний содержит три составляющих (рис. 7). Основная компонента представляет собой исходное немодулированное колебание с *несущей частотой* ω_0 и амплитудой $A_{\text{осн}} = A_0$ — первое слагаемое в правой части (П.14); боковые компоненты спектра соответствуют гармоническим колебаниям с частотами $(\omega_0 + \Omega)$ и $(\omega_0 - \Omega)$ — второе и третье слагаемые (П.14). Амплитуды этих двух колебаний одинаковы и составляют $m/2$ от амплитуды немодулированного колебания: $A_{\text{бок}} = A_0 m/2$.

Контрольные вопросы

1. Нарисуйте спектры $F(\omega)$:
 - а) бесконечно длинной синусоиды;
 - б) синусоиды конечной длины;
 - в) периодической последовательности цугов;
 - г) периодической последовательности прямоугольных импульсов;
 - д) одного цуга;
 - е) одного прямоугольного импульса.
2. Как изменится спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов, если убрать каждый второй импульс? Как выглядит спектр, если повторять эту процедуру, пока не останется один импульс?
3. Как изменится спектр периодической последовательности цугов, если время общей продолжительности цугов уменьшится вдвое? Как изменится вид спектра, если повторять эту процедуру, пока не останется один цуг?
4. Найдите спектр синусоидальных колебаний, модулированных по фазе:

$$f(t) = A_0 \cos(\omega t + m \cos \Omega t),$$

считая $m \ll 1$.

Сравните со спектром синусоиды, модулированной по амплитуде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. III. Электричество — М.: Наука, 1983. § 128.
2. *Крауфорд Ф.* Берклевский курс физики. Т. III. Волны. — М.: Наука, 1976. § 6.4.

СОДЕРЖАНИЕ

150. Спектральный анализ электрических сигналов.....	3
151. Синтез гармонических сигналов.....	9
Приложение. Спектральный анализ электрических сигналов.....	13